UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

EU Informática · 23-24 de noviembre de 2013

Procesamiento de Patrones en Python

GERARD ROMA

MTG

SEBASTIAN XAMBÓ

FME Y FIB / MA2

Resumen. El tratamiento de señales digitales (textos, sonido y voz, imágenes) es un extenso y fecundo campo para el estudio teórico y experimental de una gran variedad de algoritmos, como por ejemplo los que aparecen en los problemas de compresión y descompresión de datos e imágenes o en la síntesis y análisis de patrones (generalmente con componentes que dependen de parámetros estocásticos). Para tales fines, la potencia, expresividad y robustez de Python lo convierten en un lenguaje de programación ideal, tanto para investigadores como para clases de laboratorio de asignaturas cuyos contenidos tengan relación con estas temáticas. El objetivo de la charla es presentar algunos de los algoritmos más relevantes utilizados en teoría de la señal e ilustrarlos con implementaciones en un entorno basado en Python.

http://www-ma2.upc.edu/sxd/conf

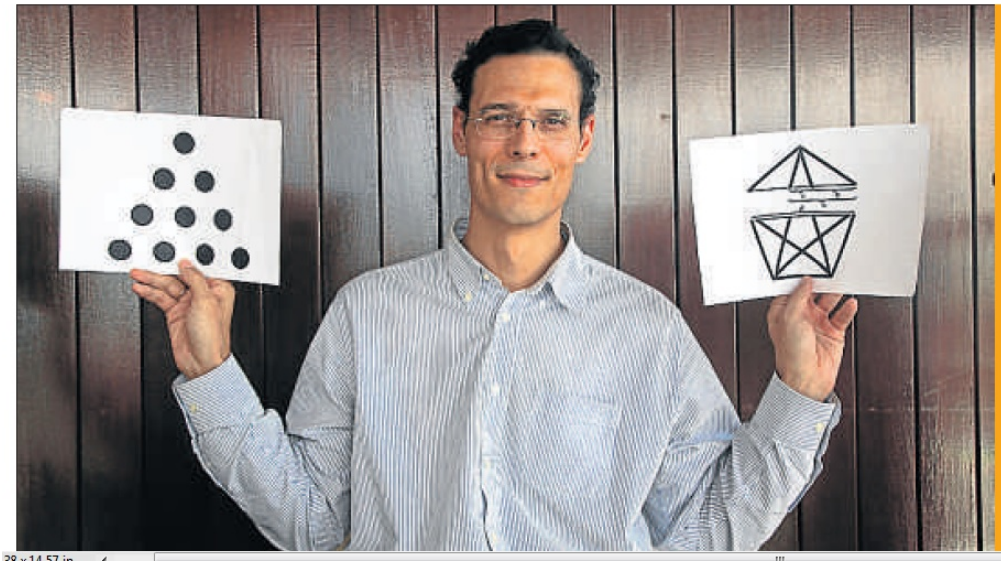
ÍNDICE

A CUENTO DE *EL ASESINATO DE PITÁGORAS*

Marcos Chicot, *escritor*

Tengo 41 años. Soy de Madrid. Soy economista y psicólogo y me dedico a escribir novelas. Estoy casado y tengo dos hijos, Lucía (4) y Daniel (1). ¿Política? Buen gobierno y solidaridad: dono el 10% de lo que gano a una oenegé. Agnóstico. El pentáculo simboliza el pitagorismo.

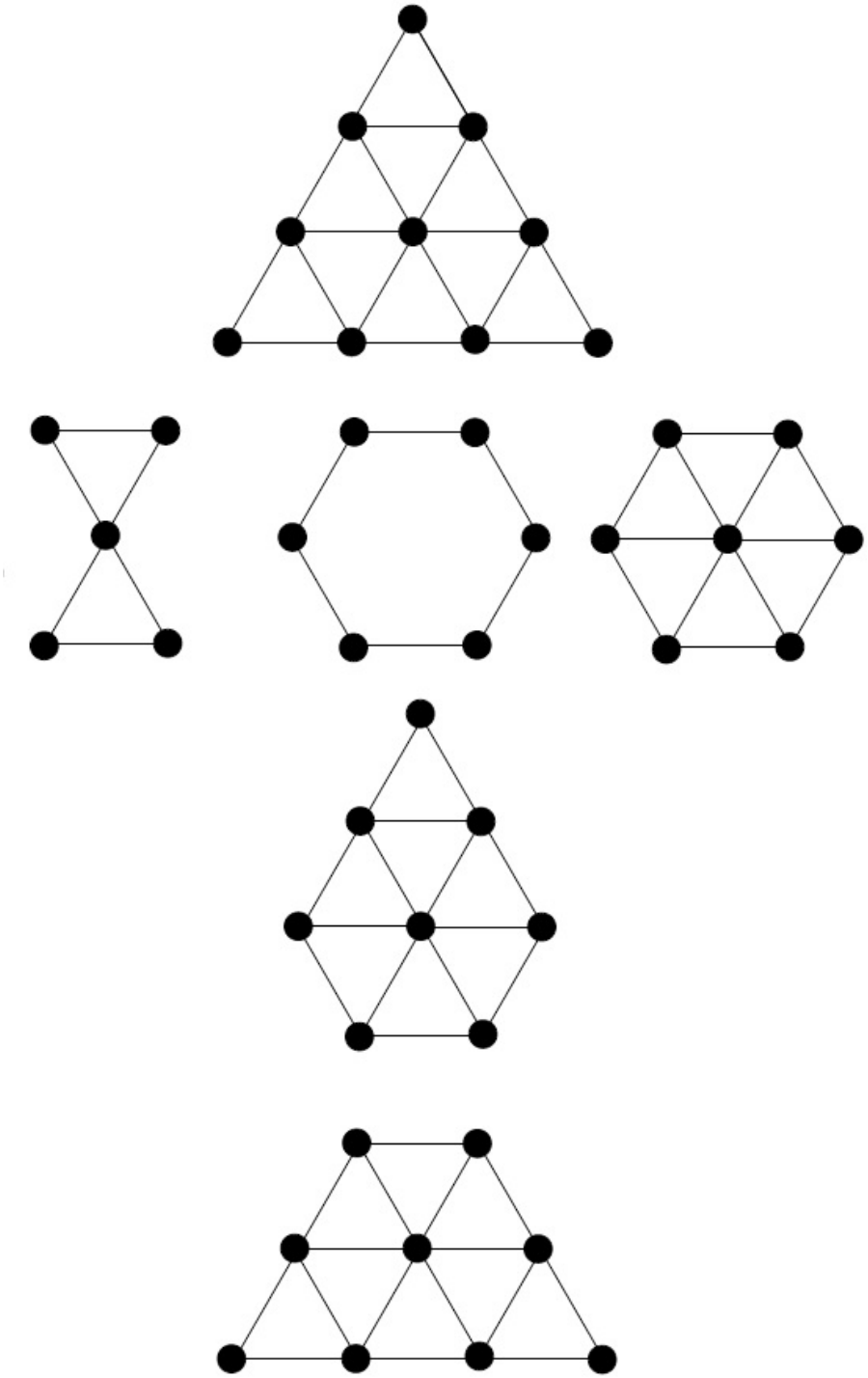
"Pitágoras es el hombre más influyente de la historia"

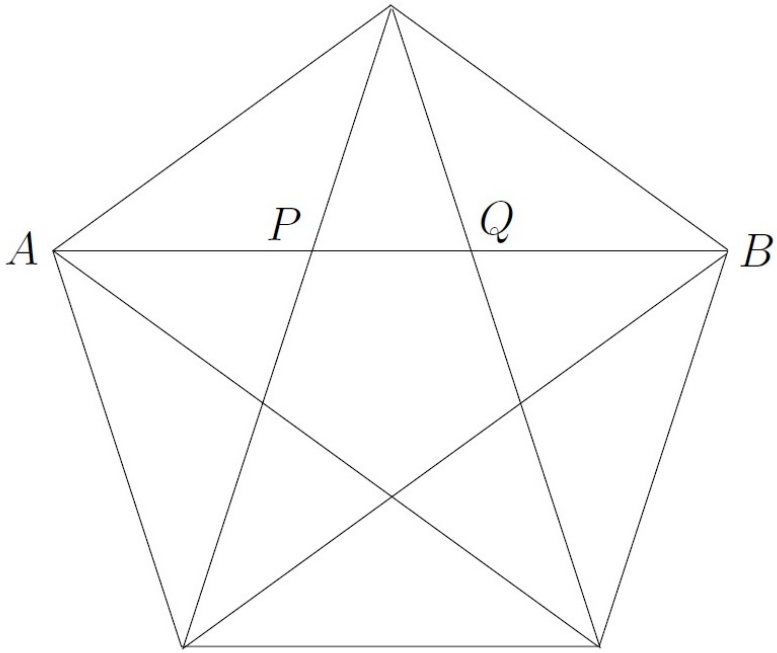


'Tetraktys'

"Juro por el hombre que grabó la *tetraktys* en nuestro pecho", se juramentaban los pitagóricos en nombre de su maes 2.500 hijos homb más l su tie para

La Contra 9/11/2013
(Víctor-M. Amela)
La Vanguardia



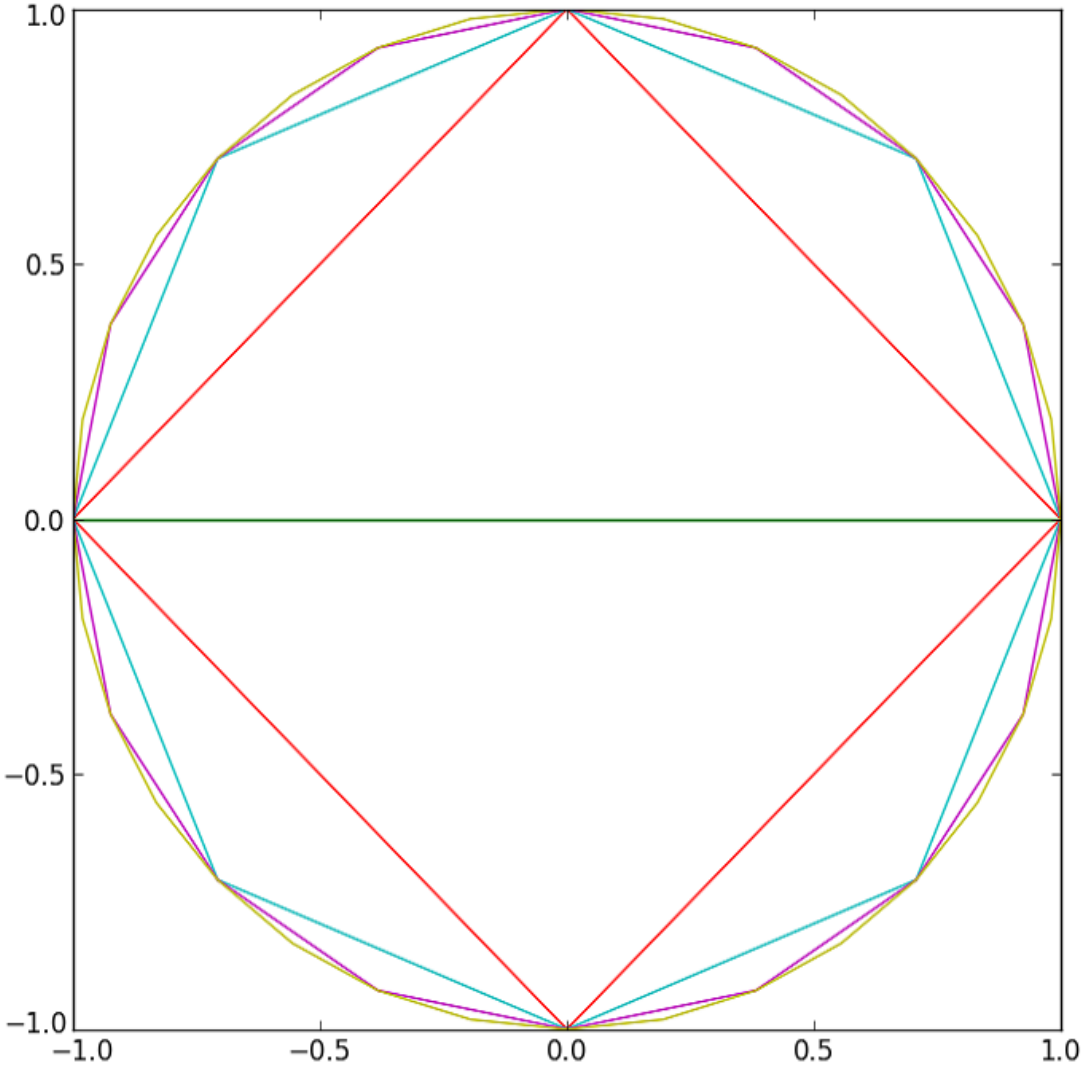


$$AB/PB = PB/QB = QB/PQ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

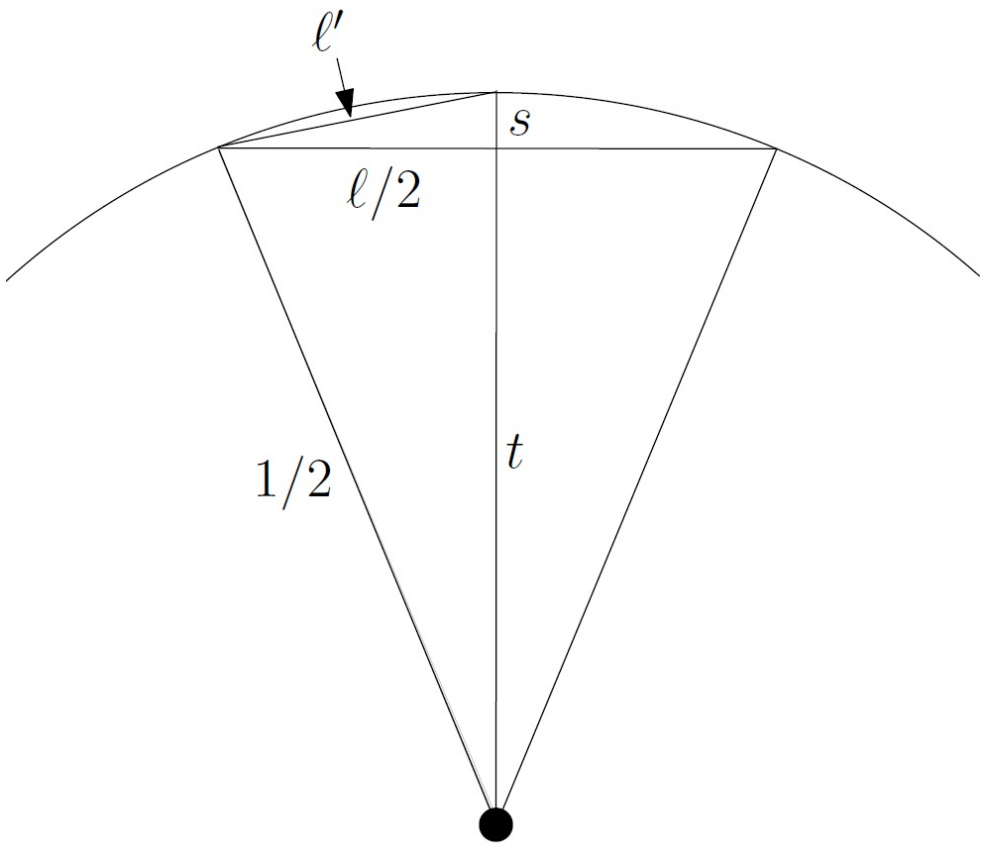
$$\Phi = 1.6180339887498949$$

(razón áurea)

“Han pasado 2.500 años pero somos hijos de Pitágoras, el hombre que reunió los más hondos saberes de su tiempo y los fusionó para acuñar una doctrina a la vez racional y mística, autoexigente y fraternal, que engendró la filosofía, la matemática y la democracia. Me lo explica Marcos Chicot, que lo sabe todo sobre el sabio griego, como demuestra en su web (Marcoschicot.com) y en su novela ***El asesinato de Pitágoras*** (Duomo), un trepidante thriller histórico que nos transporta a la cuna de nuestro mundo entre intrigas y pasiones”.



⇛ `polygons.py`



$$\ell'^2 = \ell^2/4 + s^2$$

$$s = 1/2 - t$$

$$t^2 = 1/4 - \ell^2/4$$

$$s^2 = \left(1/2 - \sqrt{1/4 - \ell^2/4}\right)^2$$

Multiplicando por

$$2^{2n+2} = (2^{n+1})^2,$$

obtenemos:

$$\pi_{n+1}^2 = \pi_n^2 + 2^{2n+2}\left(1/2 - \sqrt{1/4 - \pi_n^2/2^{2n+2}}\right)^2$$

$$\pi_{n+1}^2 = \pi_n^2 + 2^{2n}\left(1 - \sqrt{1 - \pi_n^2/2^{2n}}\right)^2$$

⇛ pi_pitagoras.py

(2, 2.828427124746190097603377448)

(3, 3.061467458920718173827679872)

(4, 3.121445152258052285572557895)

(5, 3.136548490545939263814258044)

(6, 3.140331156954752912317118524)

(7, 3.141277250932772868062019770)

(8, 3.141513801144301076328515059)

(9, 3.141572940367091384135800110)

(10,3.141587725277159700628854262)

(11,3.141591421511199973997971763)

(12,3.141592345570117742340375993)

(13,3.141592576584872665681606091)

(14,3.141592634338562989095478263)

(15,3.141592648776985669485107969)

(16,3.141592652386591345803525521)

(17,3.141592653288992765271943042)

(18,3.141592653514593120163348243)

(19,3.141592653570993208887718344)

(20,3.141592653585093231068905794)

(21,3.141592653586182366142085 89)

(22,3.141592653589499488000534659)

(23,3.141592653589719800847116200)

(24,3.141592653589774879058761587)

(25,3.141592653589788648611672934)

(26,3.141592653589792090999900771)

(27,3.141592653589792951596957730)

(28,3.141592653589793166746221970)

(29,3.141592653589793220533538030)

(30,3.141592653589793233980367045)

(31,3.141592653589793237342074299)

(32,3.141592653589793238182501112)

(33,3.141592653589793238392607815)

3.14159265358979323846264338327950…

$$2^{33} = 8589934592$$

⇛ pi_chudnovsky.py

```
for j in [0,1,2,3]:
    print((j,pi_chudnovsky(j)))
>>>
(0,3.14159265358973420766845359157829834076223326091 5)
(1,3.14159265358979323846264338358735068847586634599 6)
(2,3.14159265358979323846264338327950288419716 7678854)
(3,3.14159265358979323846264338327950288419716939937 5)
```

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4…

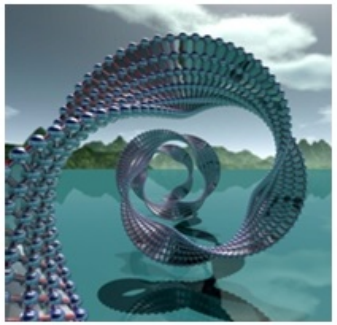
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(6n)!}{(3n)!\,n!^3}\frac{545140134n+13591409}{640320^{3n}}=\frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi}$$

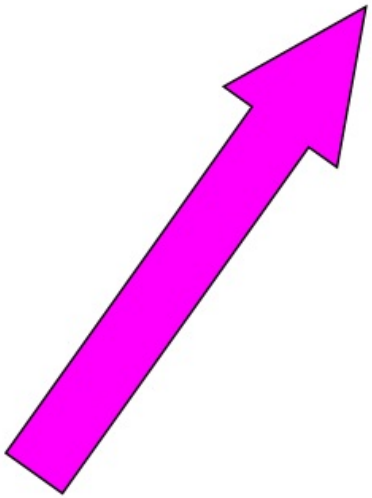
⇛ `pi_guillera.py`

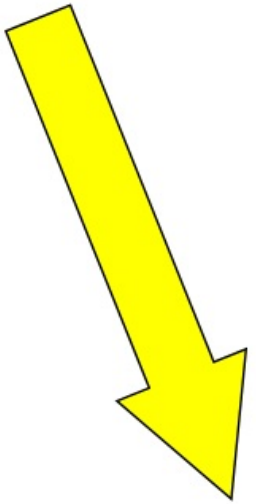
Fórmula de Jesús Guillera (2002) para aproximar π. Según Antonio Córdoba (UAM), Guillera es “nuestro Ramanujan español”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2\,(4n)!\,(120n^2+34n+3)}{n!^8\,2^{16n}} = \frac{32}{\pi^2}$$

Matemáticas





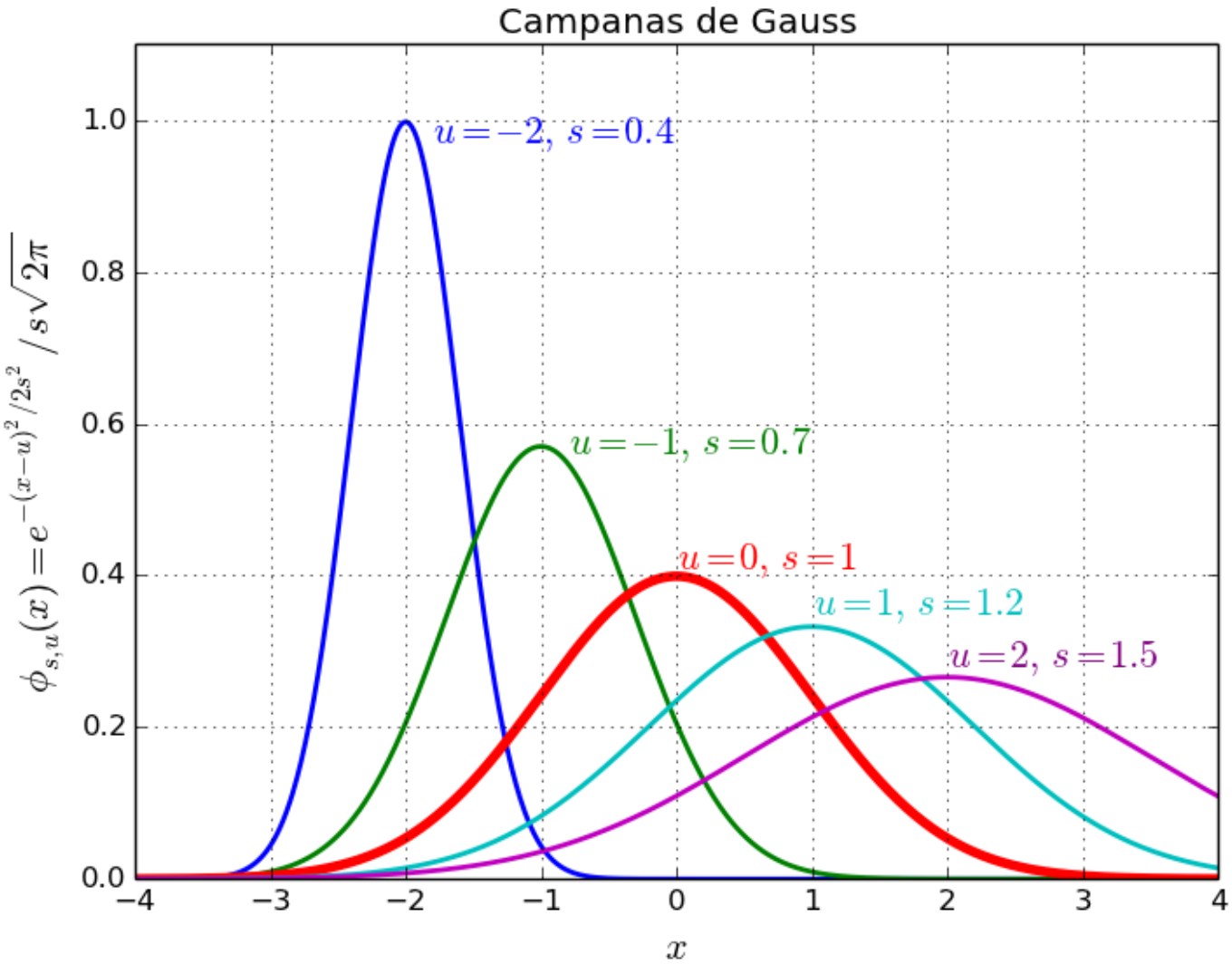


Programas

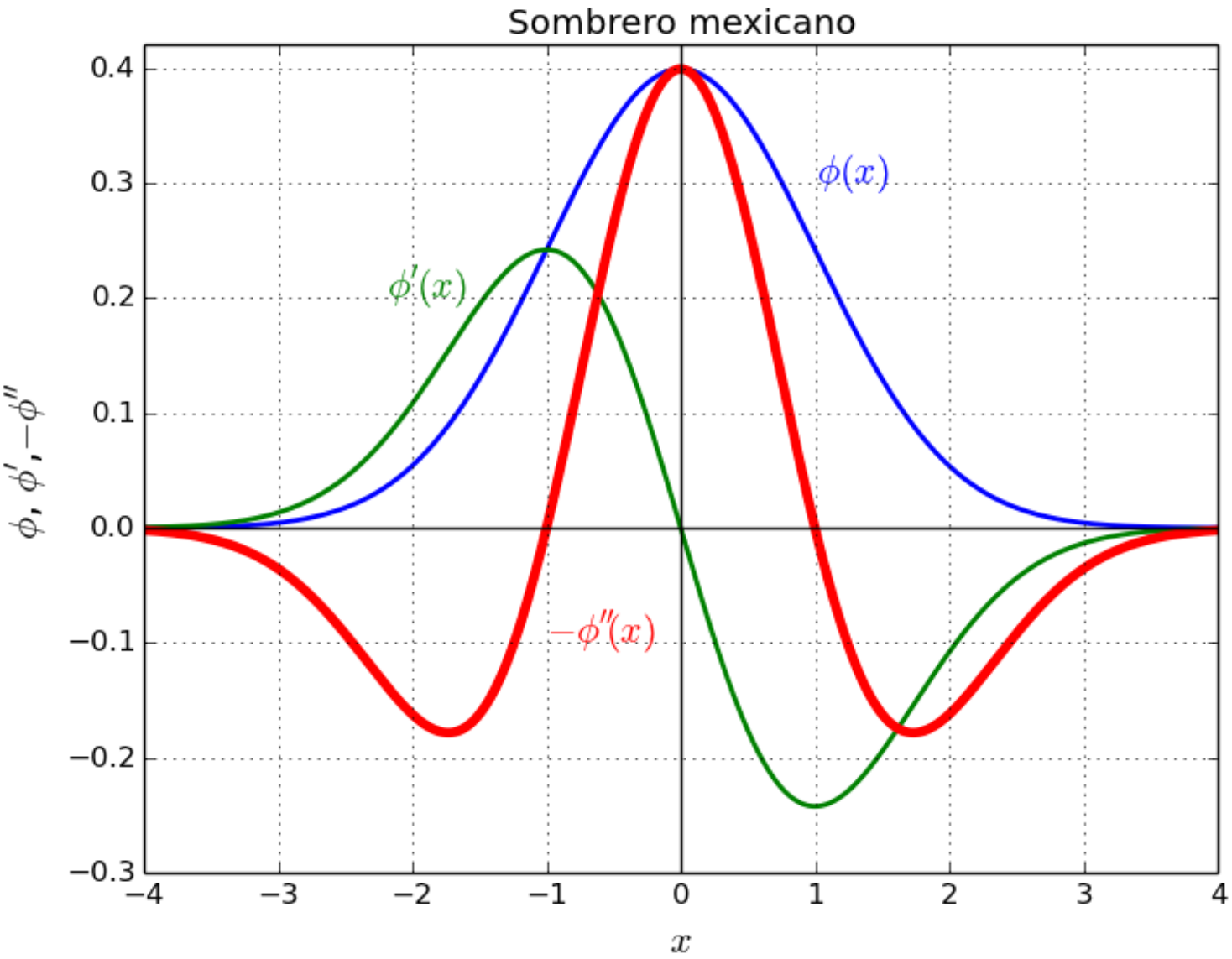
Algoritmos

SOMBREROS MEXICANOS

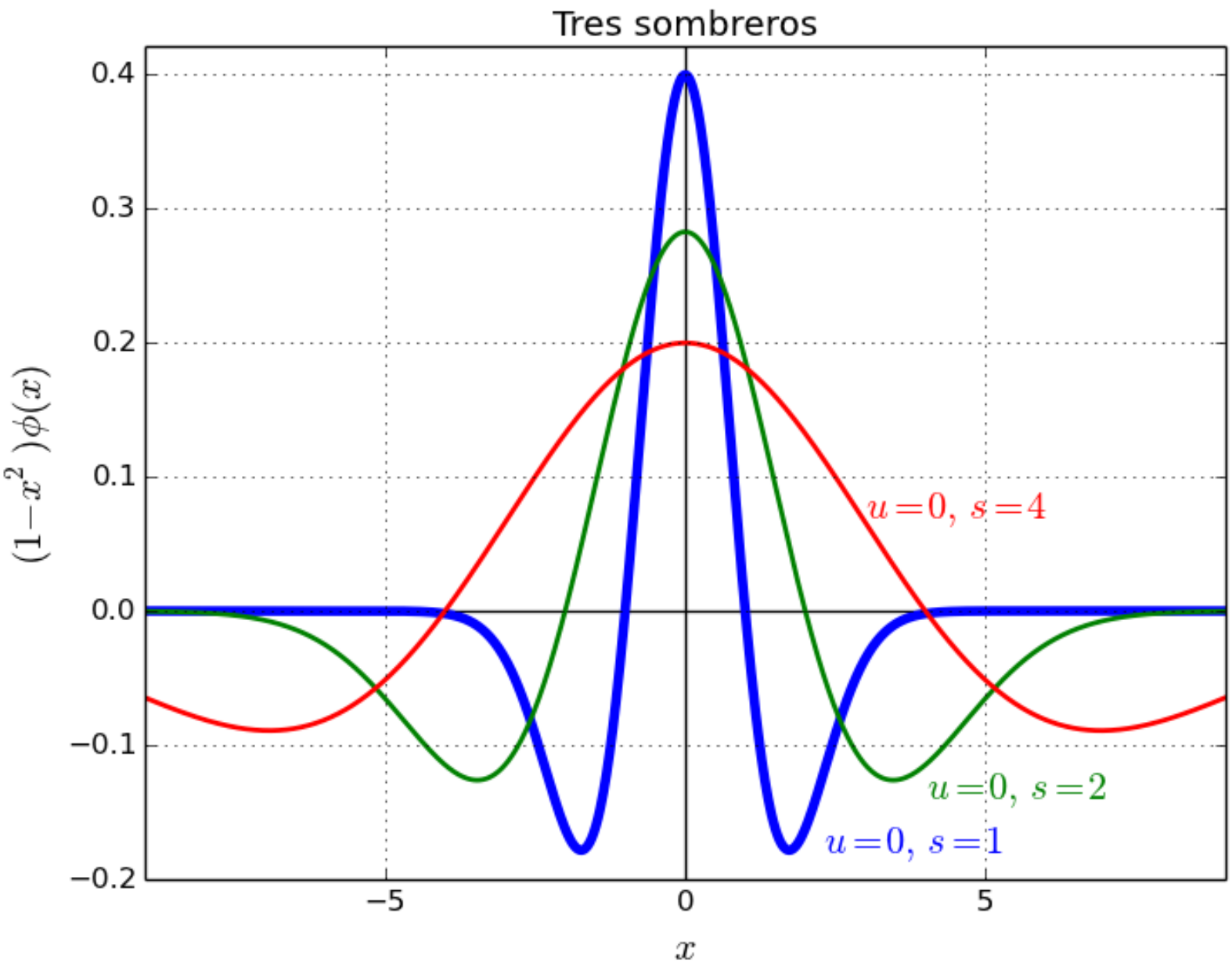
Campana de Gauss (⇛ `campanas.py`): $\phi_{s,u}(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2s^2}}$



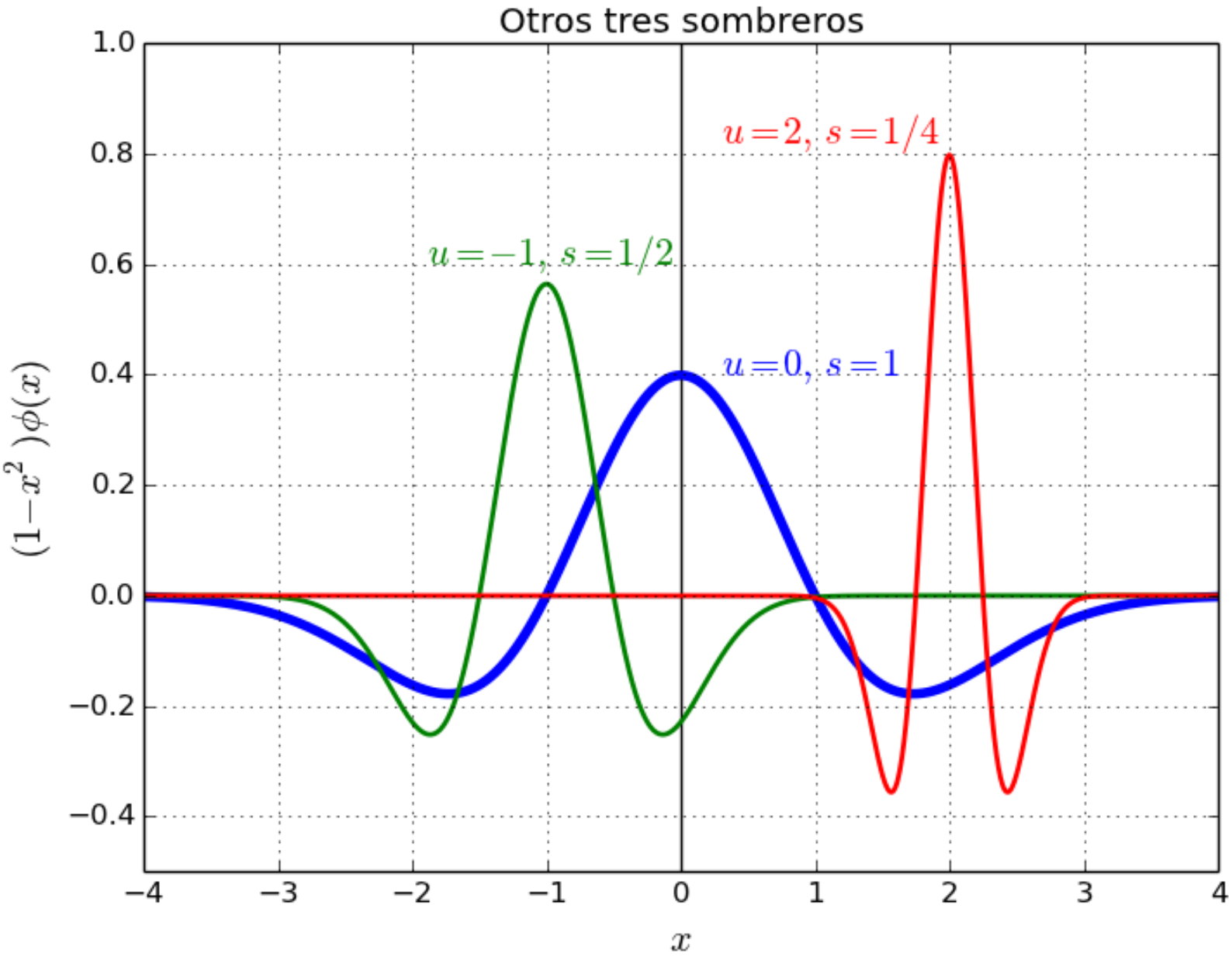
Sombrero mexicano (⇛ `sombrero.py`) $(1-x^2)e^{-x^2/2}$



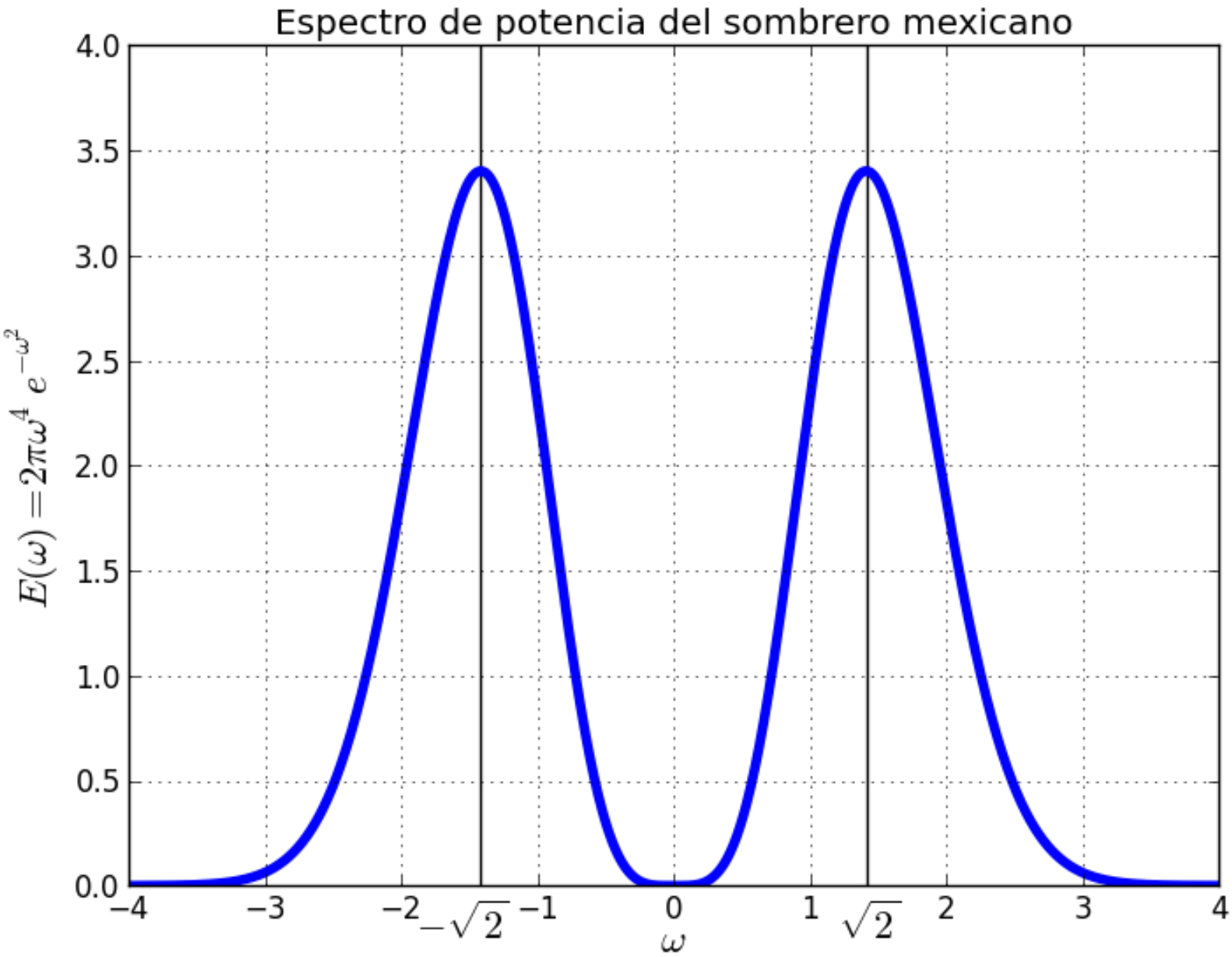
⇛ sombreros-A.py



⇛ sombreros-B.py



⇛ espectro-sombrero.py



CAPTANDO VIBRACIONES ⇛ morlets.py

$$\psi(t) = ke^{-t^2/2}\cos(\sigma t),$$

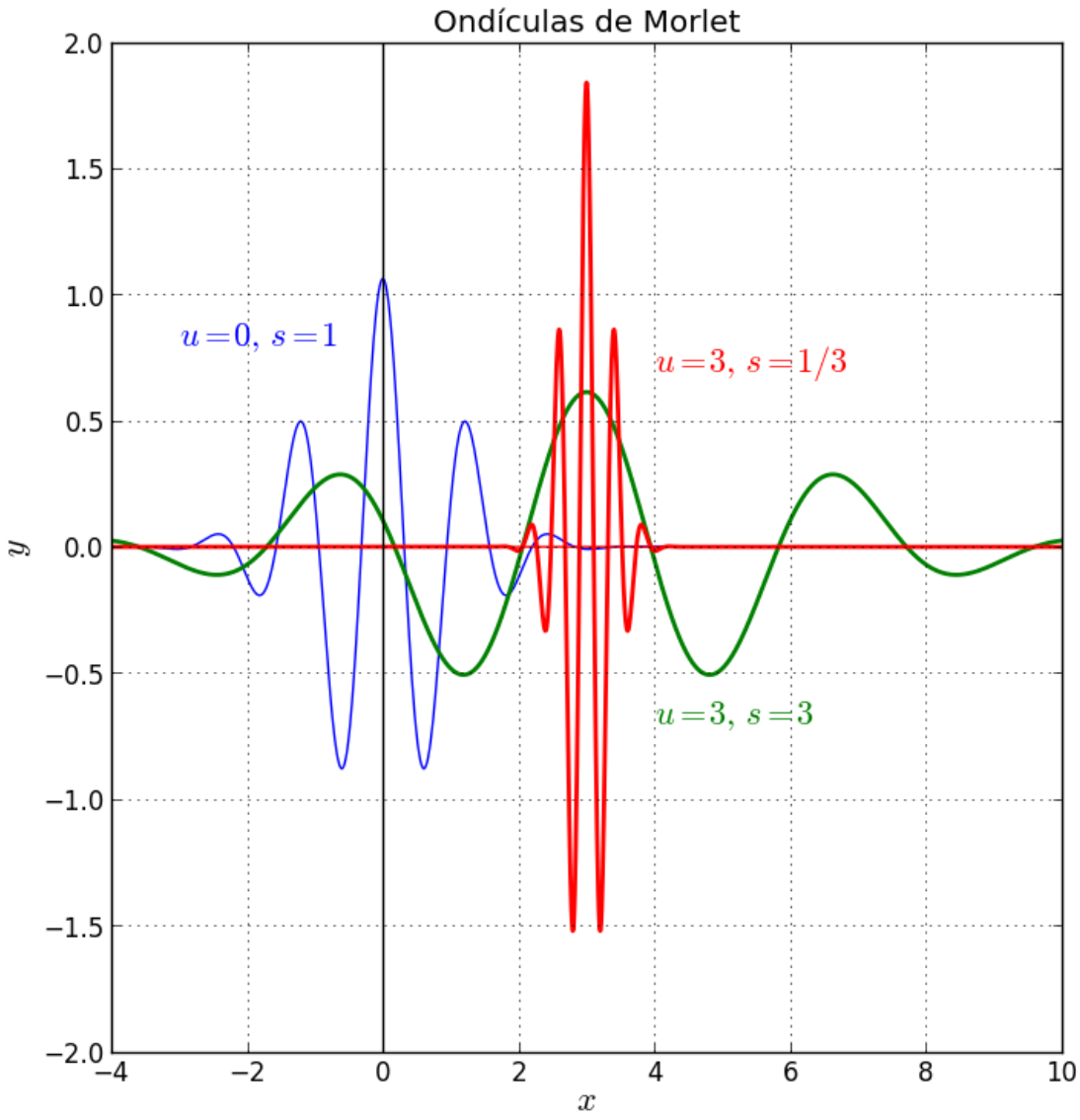
$$k = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}} \simeq 1.062251932,$$

$$\sigma = 5.$$

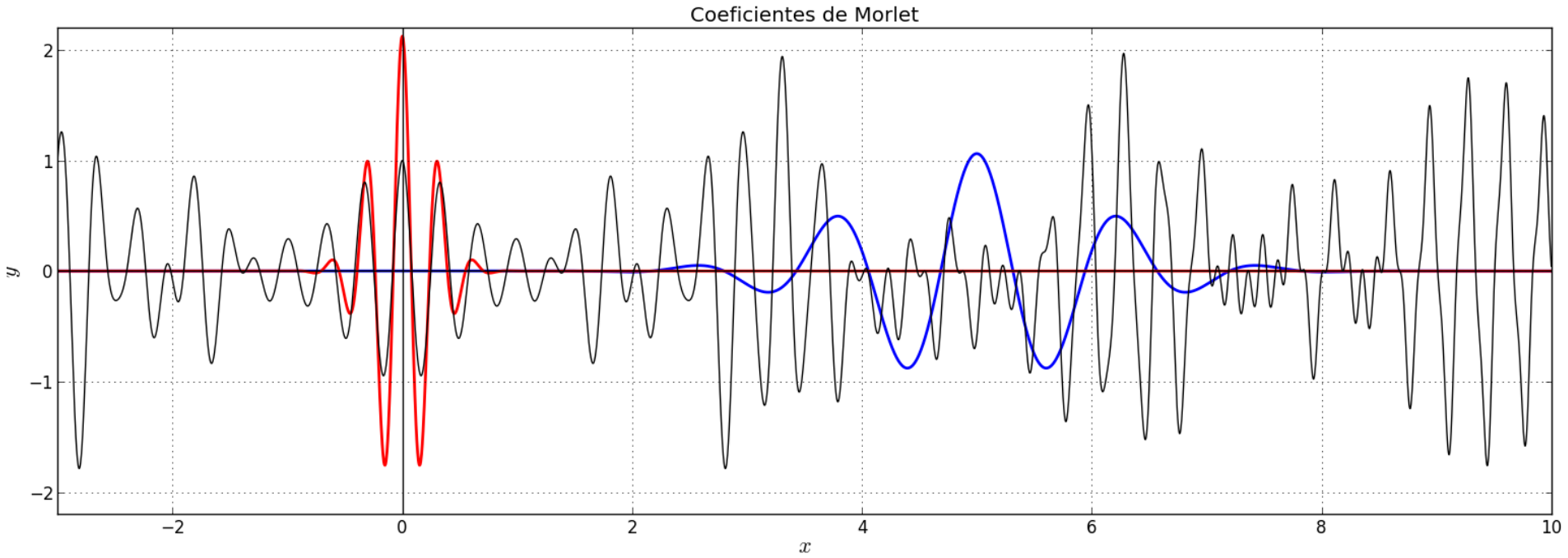
Una onda de frecuencia $5/2\pi$ amortiguada por una envolvente gaussiana.

Usada en sismología, acústica y visión.

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

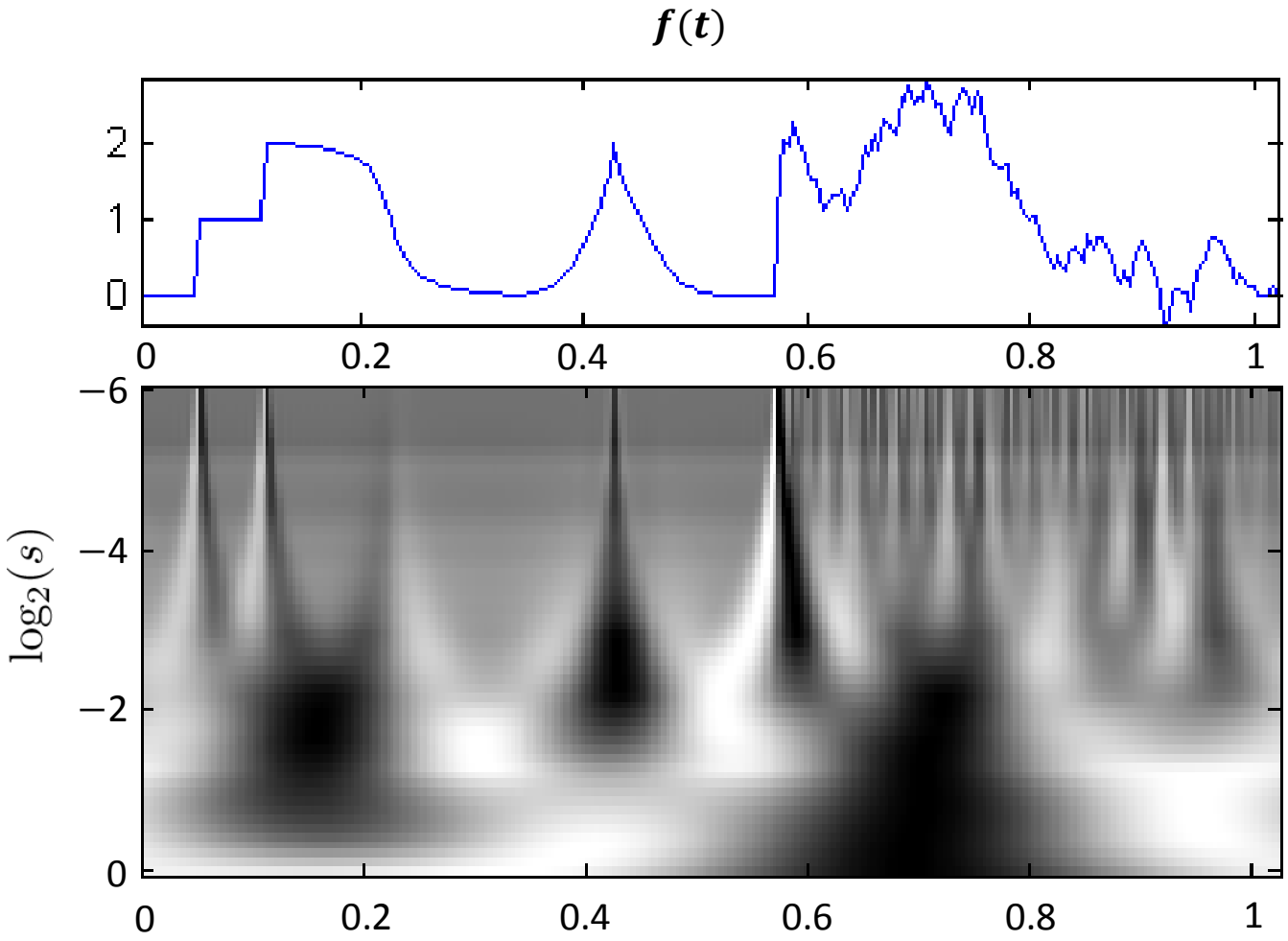


⇛ `morlet_coefficients.py`



Dos ondículas de Morlet superpuestas a una señal $f(t)$ (en negro). La de color azul es $\psi(t-5)$: la estándar, desplazada a $u=5$. No se aprecia correlación con la señal. La de color rojo es $\psi_{1/4,0}(t)$, o sea, ψ comprimida a 1/4 y con altura doble). Tiene correlación alta con la señal. Los índices de correlación son los coeficientes de Morlet: $\int f(t)\psi_{s,u}(t)dt$. En este caso resultan ser 0.07 para la azul y 0.58 para la roja. El valor máximo posible es 0.67 (0.58 representa el 86.57% de 0.67).

Escalogramas



Escalograma de $f(t)$ usando el sombrero mexicano

ONDÍCULAS DE DAUBECHIES

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \alpha_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \alpha_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \alpha_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$\alpha_1 \simeq 0.48296, \alpha_2 \simeq 0.83652, , \alpha_3 \simeq 0.22414 \ , \alpha_4 \simeq -0.12941$$

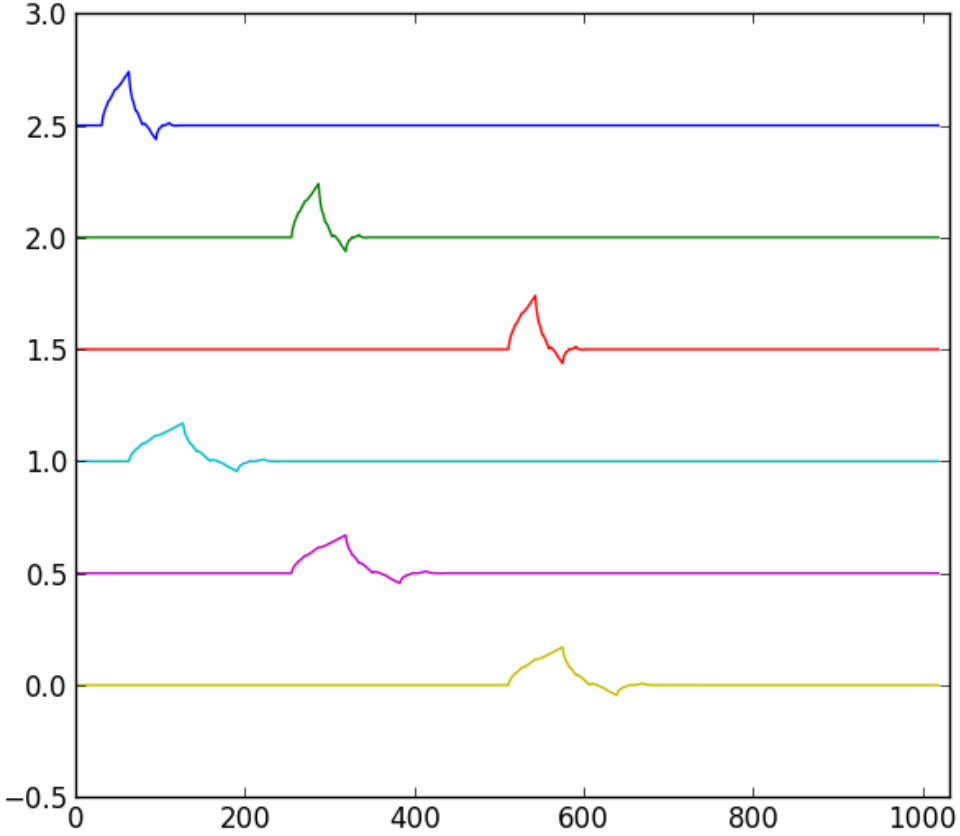
$$N = 2^n$$

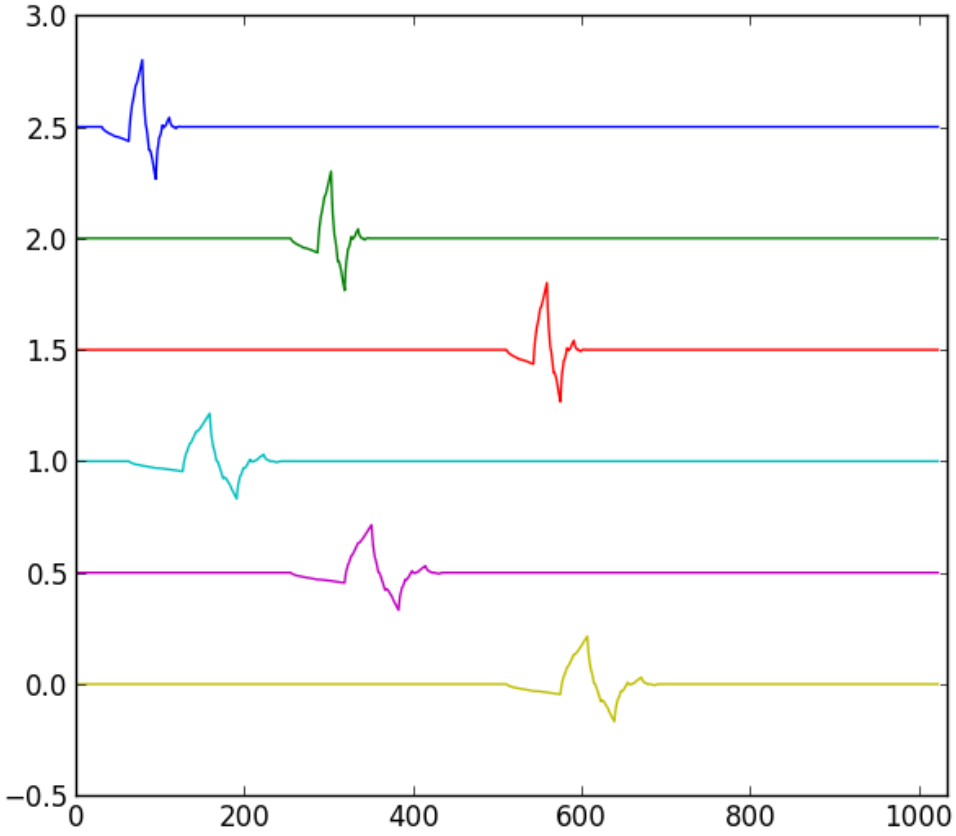
Los vectores de escala de nivel 0, $\mathbf{v}_j^0$ $(j = 0, \dots, N-1)$ se definen como las filas de la matriz identidad I_N (`eye(N)`). Los vectores de escala y los vectores ondícula de nivel r $(r = 1, \dots, n)$, $\mathbf{v}_j^r$ y $\mathbf{w}_j^r$ $(j = 0, \dots, N/2^r - 1)$ se definen a partir de los $\mathbf{v}_j^{r-1}$ mediante las fórmulas siguientes:

$$\mathbf{v}_j^r = \alpha_1 \mathbf{v}_{2j-1}^{r-1} + \alpha_2 \mathbf{v}_{2j}^{r-1} + \alpha_1 \mathbf{v}_{2j+1}^{r-1} + \alpha_1 \mathbf{v}_{2j+2}^{r-1}$$

$$\mathbf{w}_j^r = \alpha_4 \mathbf{v}_{2j-1}^{r-1} - \alpha_3 \mathbf{v}_{2j}^{r-1} + \alpha_2 \mathbf{v}_{2j+1}^{r-1} - \alpha_1 \mathbf{v}_{2j+2}^{r-1}$$

⇛ daub4-basis.py





Señales de escala $\mathbf{v}_1^5$, $\mathbf{v}_8^5$, $\mathbf{v}_{16}^5$, $\mathbf{v}_1^6$, $\mathbf{v}_4^6$, $\mathbf{v}_8^6$ (izquierda) y ondículas $\mathbf{w}_1^5$, $\mathbf{w}_8^5$, $\mathbf{w}_{16}^5$, $\mathbf{w}_1^6$, $\mathbf{w}_4^6$, $\mathbf{w}_8^6$ (derecha) de la familia Daub-4. El despla-zamiento vertical es por conveniencia de la representación.

Multiresolución

Si f es un vector de longitud N, ponemos

$A^r = \sum (f \cdot \mathbf{v}_j^r)\, \mathbf{v}_j^r$ (promedio de nivel r de f, $r = 0,1, \dots, n$)

$D^r = \sum (f \cdot \mathbf{w}_j^r)\, \mathbf{w}_j^r$ (detalle de nivel r de f, $r = 1, \dots, n$)

Se cumplen las relaciones

$A^0 = f$ y $A^{r-1} = A^r + D^r$

$f = A^1 + D^1 = A^2 + D^2 + D^1 = \cdots$

$= A^r + D^r + D^{r-1} + \cdots + D^2 + D^1$ $(r = 1, \dots, n)$.

Ejemplo (⇛ `daub4-mra.py`)

La imagen de la izquierda contiene

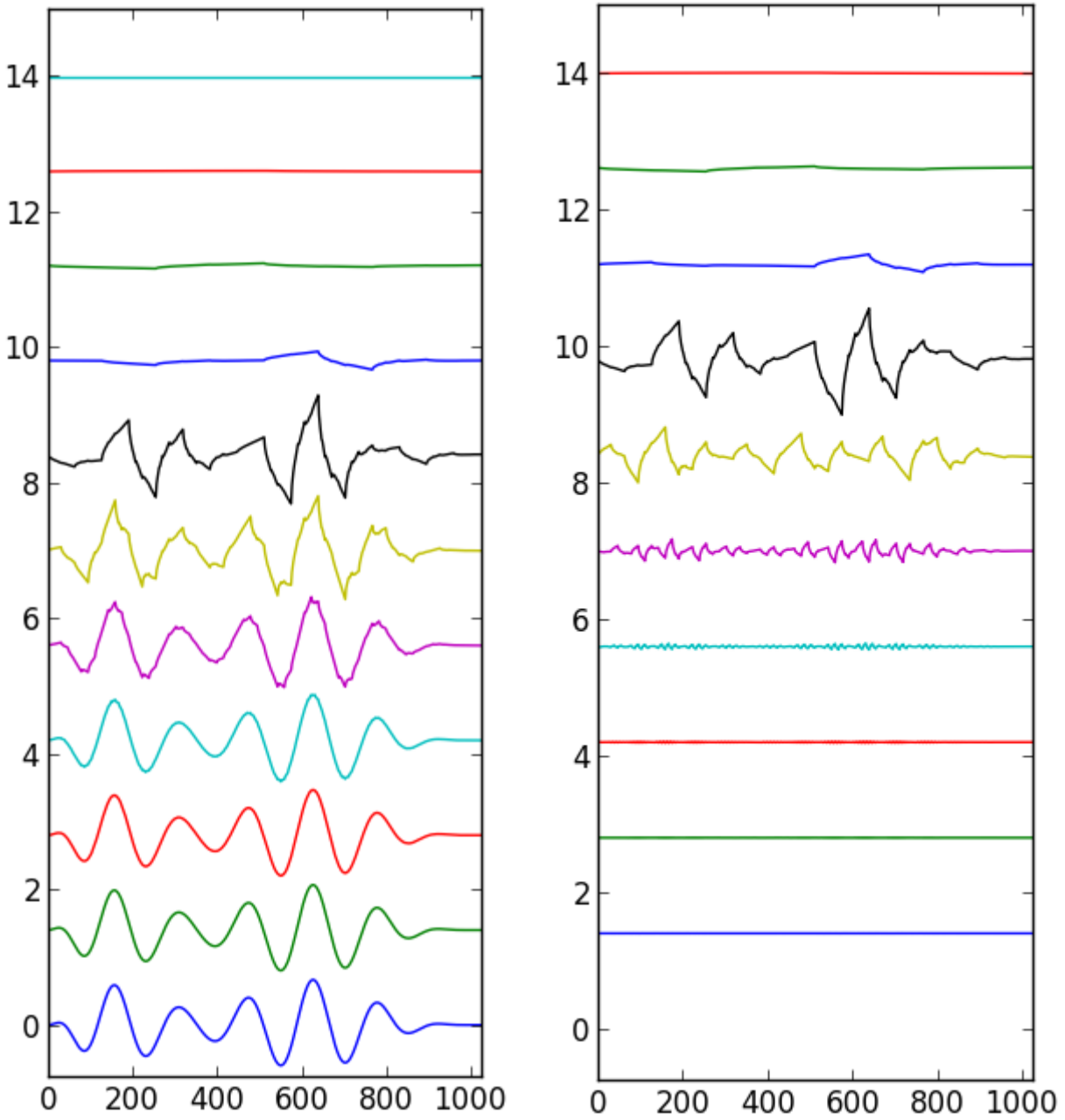
$$A^{10}, \ldots, A^0 = f$$

y la de la derecha,

$$D^{10}, \ldots, D^1.$$

$$f = A^{10} + D^{10} + \cdots + D^1$$

Estas técnicas tienen múltiples usos, como en compresión de señales o en el filtrado de ruido.



Transformada `D4T(f,r)`

Su valor es el vector $a^r|d^r|d^{r-1}|\cdots|d^2|d^1$ (| denota concatenación), con

$$a^r = \left[f \cdot \mathbf{v}_1^r, \ldots, f \cdot \mathbf{v}_{N/2^r}^r\right]$$

$$d^r = \left[f \cdot \mathbf{w}_1^r, \ldots, f \cdot \mathbf{w}_{N/2^r}^r\right]$$

La energía de un vector x, $\mathcal{E}(x)$, se define por la fórmula

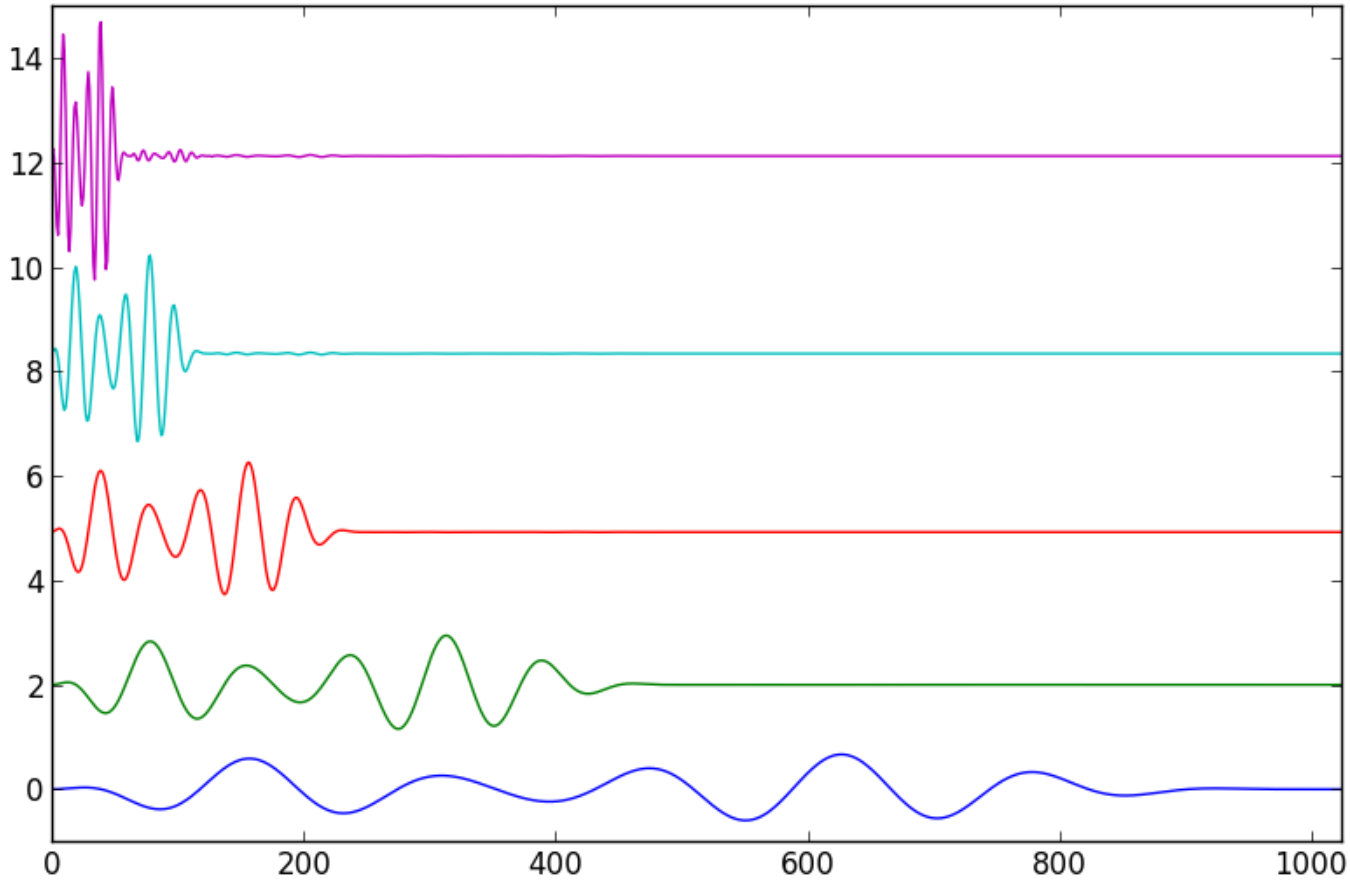
$$\mathcal{E}(x) = \sum x_j^2.$$

Se cumple que

$$\mathcal{E}(a^r|d^r|d^{r-1}|\cdots|d^2|d^1) = \mathcal{E}(a^r) + \mathcal{E}(d^r) + \cdots + \mathcal{E}(d^1)$$

Por la teoría de las ondículas de Daubechies se sabe que $\mathcal{E}(a^r)$ concentra casi toda la energía de f, pero cada vez menos conforme r crece. Este hecho nos proporciona un método para obtener compresiones notables de f, como veremos en los ejemplos.

Ejemplo (⇛ `daub4-compress.py`) (3.3)



Transformadas `D4T(f,r)`, para $r = 0,1,\ldots,4$. Energías de la parte a^r :

0 (100.00)	1 (100.00)	2 (100.00)	3 (99.99)	4 (99.77)	5 (96.72)
85.51126	85.51121	85.51046	85.49854	85.31377	82.70740
1:1	2:1	4:1	8:1	16:1	32:1

PATRONES/FORMAS/PAUTAS POR DOQUIER

Filosofía general

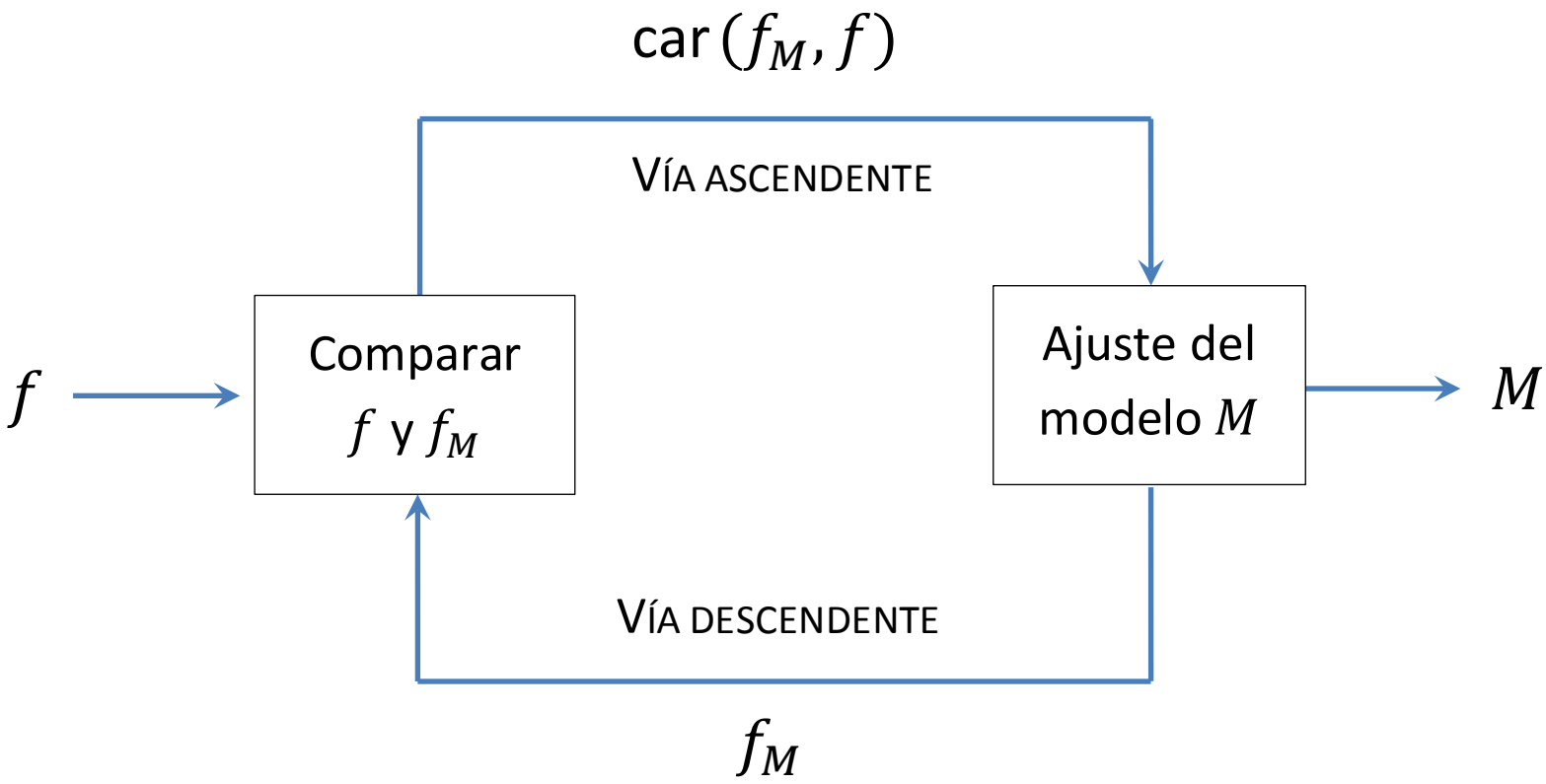
David Mumford · Agnès Desolneux
Pattern Theory. The Stochastic Analysis of Real-World Signals
A K Peters, 2010.

1. En la observación de la realidad percibimos una amplia variedad de señales, que a su vez muestran patrones/pautas de muchos tipos. La causa de estos patrones son los objetos, procesos y leyes de la realidad, pero en general no son totalmente asequibles a la observación directa. Los patrones se pueden usar para inferir información sobre estos factores no observados.

2. Las observaciones están afectadas por muchas variables que no se pueden modelar satisfactoriamente de manera determinista, porque son demasiado complejas o demasiado difíciles de observar. Estas variables a menudo pertenecen a otras categorías de eventos que son irrelevantes para las observaciones que nos interesan. Para hacer inferencias en tiempo real o con un modelo de tamaño razonable, hemos de modelar nuestras observaciones en parte estocásticamente y en parte de modo determinista.
3. Se precisan modelos estocásticos precisos que recojan las pautas presentes en la señal respetando sus estructuras naturales (simetrías, independencia de partes, marginales de estadísticas relevantes). Estos modelos se debieran derivar de los datos y validarse por muestreo.

Ulf Grenander
Elements of pattern theory
Johns Hopkins Universisty Press, 1996

ESQUEMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DE PATRONES

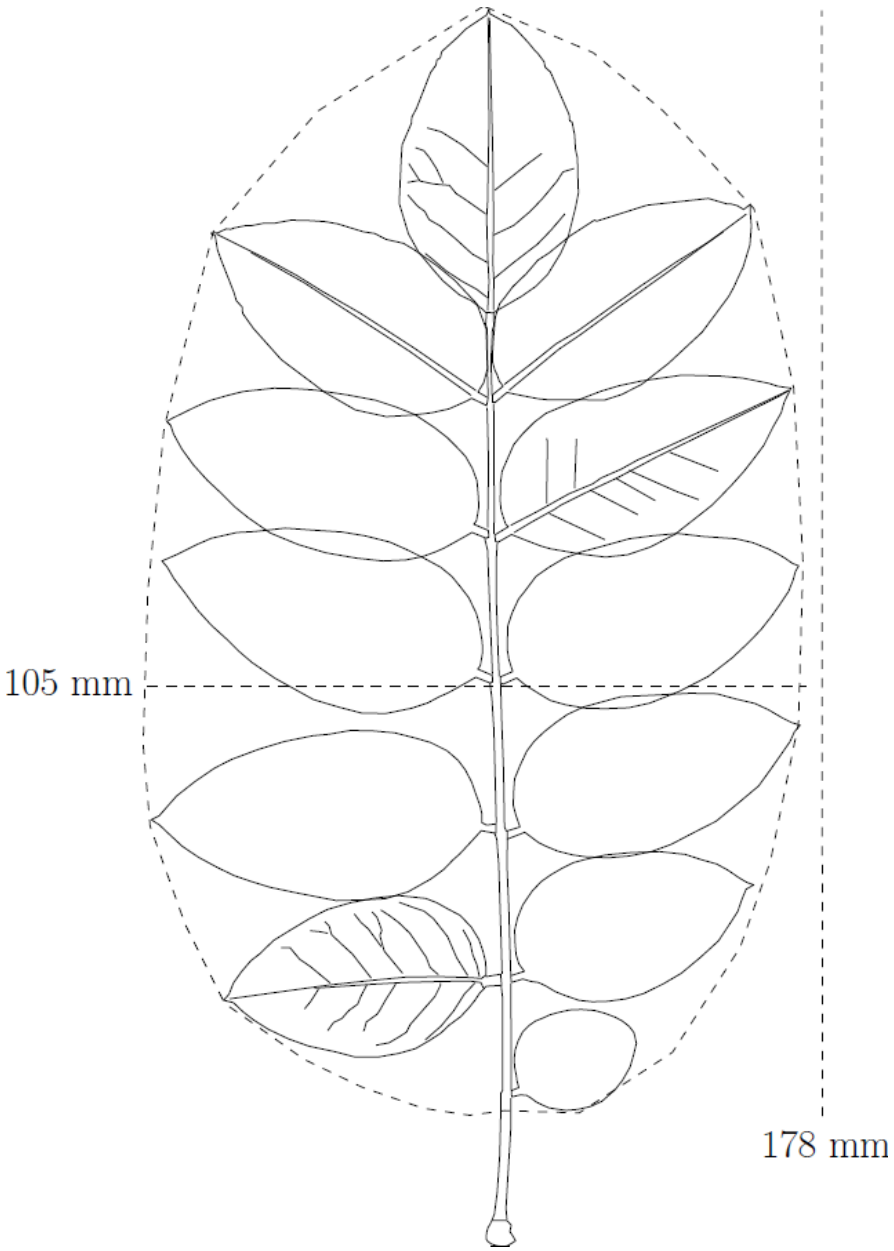


D'Arcy Wentworth Thompson: *On growth and form* (A complete revised edition). Dover, 1992 (unabridged, unaltered republication of *On growth and form: A new edition*, CUP, 1942). 1116 p.

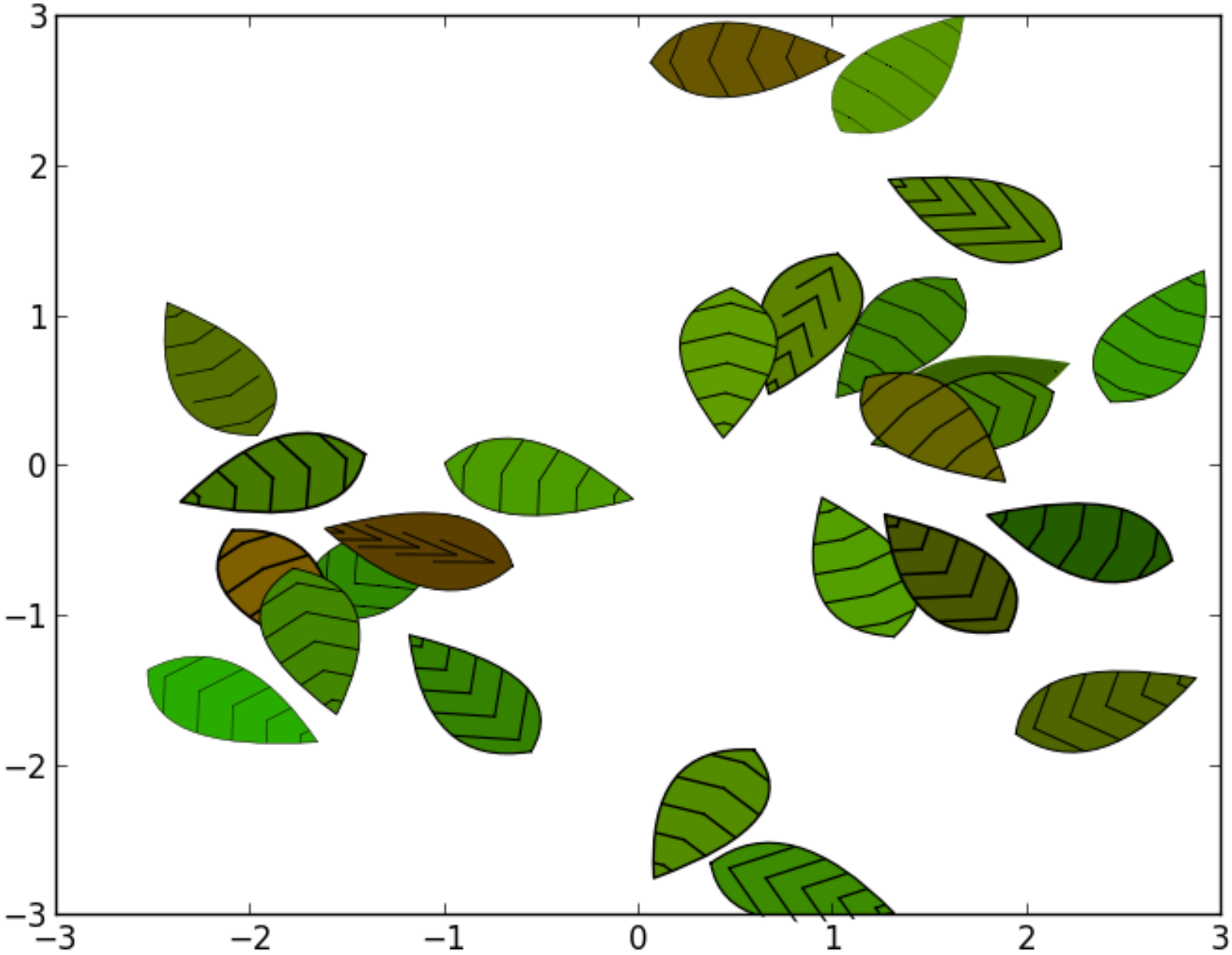
Ulf Grenander: *A Calculus of Ideas. A mathematical study of human thought*. World Scientific, 2012. xv + 219 p.

Barry Jay: *Pattern calculus: computing with functions and structures.* Springer, 2009.

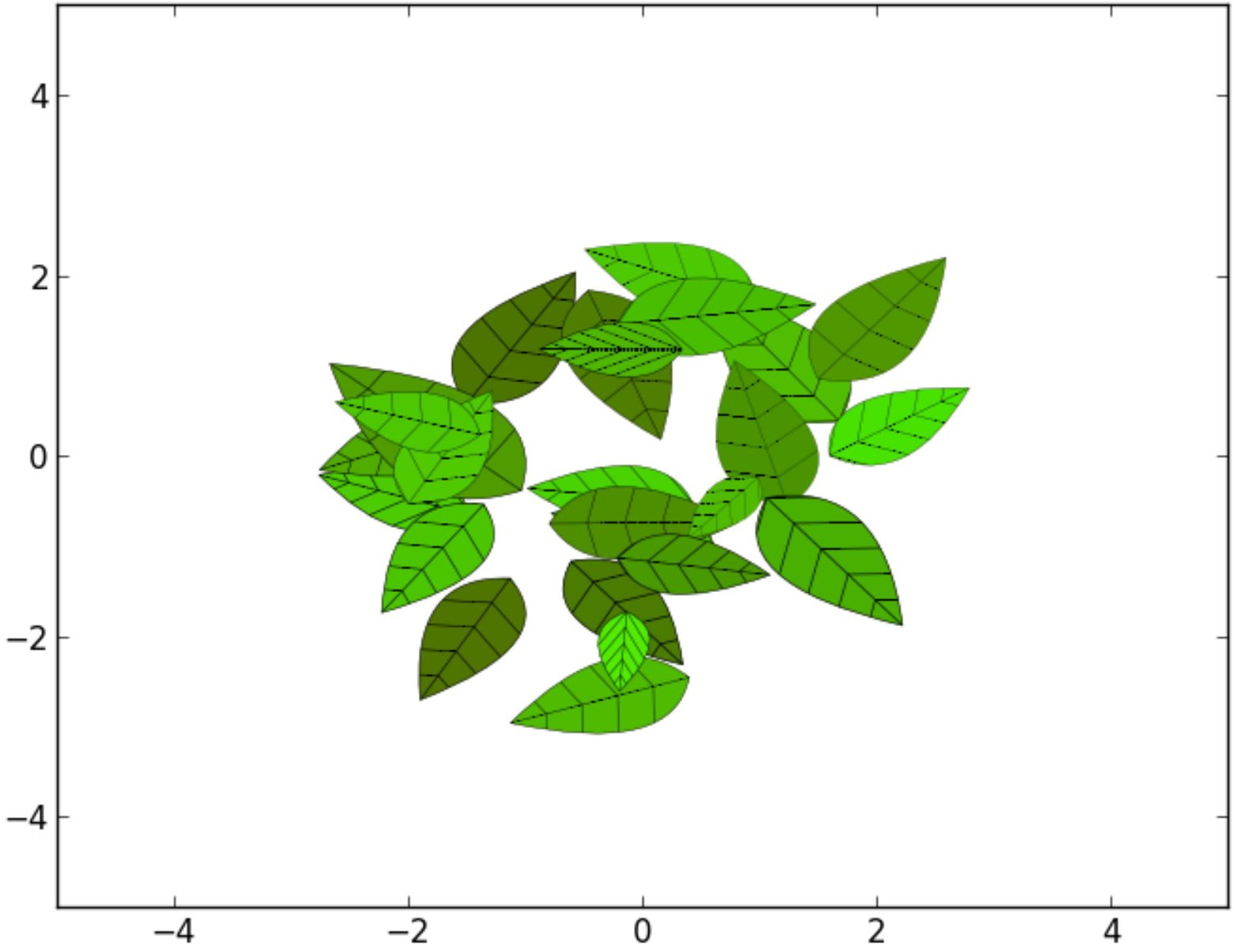
DIVERTIMENTO: HOJAS DE ACACIA



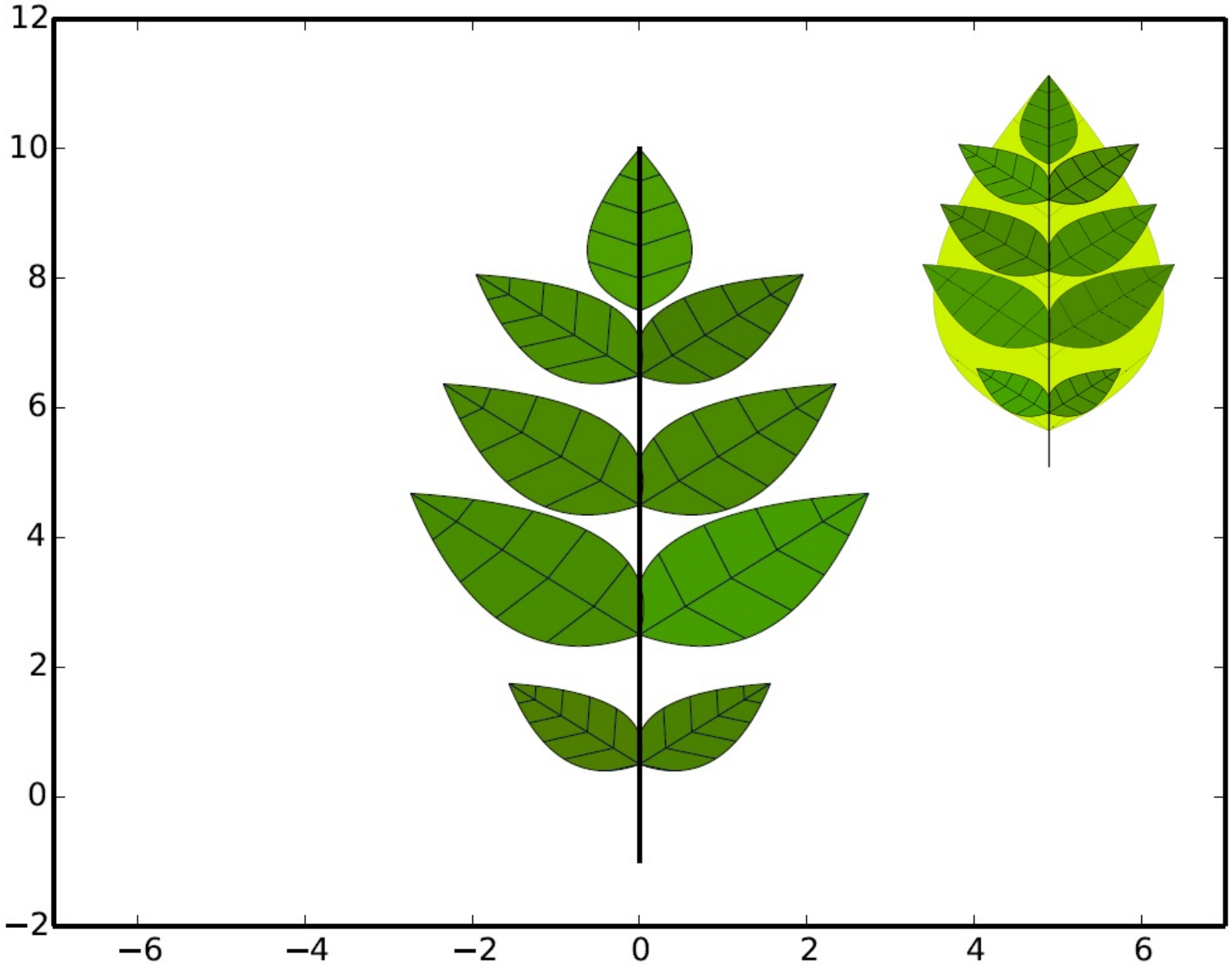
⇛ hoja-acacia-A.py



⇛ hoja-acacia-B.py



⇛ acacia.py, leaf.py



EPÍLOGO

- Lenguaje fácil de aprender y suficientemente rico como para no necesitar, en el contexto del curso aludido, prácticamente nada más.
- Facilita el trabajo de laboratorio, la resolución de problemas y la presentación de los resultados de modo fácil de evaluar.
- ¿Por qué no nos enseñan Python?
- Facilita la presentación de ejemplos, y las correspondientes ilustraciones, para explicar los conceptos teóricos.
- Promueve un espíritu indagador y creativo.
- El profesor aprende de los alumnos.
- Una buena plataforma para la investigación en matemáticas y en ingeniería matemática.

ICAIB

Computational Intelligence
for
Biomedical Image Analysis